

# 北大秦简中的数学文献\*

韩 巍(北京大学中国古代史研究中心 副教授)

在北京大学收藏的秦简牍中,与数学相关的内容所占比重最大。共有竹简4卷,即卷三、卷七、卷八以及卷四的一部分,总计400余枚,还有“九九术”木牍1方。另外,简牍中混杂的三组竹制算筹与数学也有密切关系,应该是主人生前用来计算的工具。

4卷竹简均为三道编绳。卷三长22.9~23.1厘米,卷四长22.6~23.1厘米,大约相当于秦尺一尺;卷七长23.7~24厘米,不足秦尺的一尺半寸;卷八长27.2~27.9厘米,相当于秦尺一尺二寸。卷七和卷八的形式和内容都很相似。卷七每简分上下两栏书写(以中间编绳为界),上栏形式为“广 $\times\times$ 步、从(纵) $\times\times$ 步,成田 $\times$ 亩”,下栏形式为“ $\times\times$ 步成田 $\times$ 亩”(其步数即上栏广、纵相乘之数),例如:

广六十步、从(纵)八十步,成田廿亩。

四千八百步成田廿亩。【7-020】(见本期《北京大学藏秦简牍概述》(以下简称《概述》)图二:右1)

这实际上是矩形土地面积的计算,只涉及整数的乘、除法,以二百四十平方步为一亩,实行的是秦国的亩制<sup>①</sup>。

竹简卷八亦分上下两栏,上栏形式与卷七上栏相同,下栏则为田租的计算,包括税田面积、税率和田租数额。税田面积均为上栏所记亩数的十二分之一,税率则从“三步一斗”到“廿四步一斗”不等。例如:

广百廿步、从(纵)百步,成田五十亩。

税田千步,廿步一斗,租五石。【8-023】(《概述》图二:右2)

卷七和卷八的形式整齐划一,每简内容仅有数字的差别,而且未出现任何具体的地名、人名,显然不是当时丈量田亩、征收租税的档案记录,而应该是供人学习田亩、租税计算的一种特殊算术教材或参考书。在卷八1枚简的背面近上端处写有“田书”的篇题(图一),应是这类书的专名。这两卷简册涉及的数学运算比较简单,但是对研究战国晚期至秦代的田亩、赋税制度很有帮助。

竹简卷三(82枚),以及卷四的一部分(正背面合计250余枚),主要内容是各种数学计算方法和例题的汇编,与张家山汉简《算数书》、岳麓秦简《数》以及传世《九章算术》有很多相似之处。由于未发现篇题,我们根据内容将其定名

\* 本文为国家社会科学基金重大项目“北京大学藏秦简牍整理与研究”(10&ZD090)以及国家科技支撑计划“中华文明探源工程及其相关文物保护技术研究”课题“古代简牍保护与整理研究”(2010BAK67B14)的阶段性成果。北京大学藏秦简牍的入藏和整理得到冯燊均国学基金会的资助。

为《算书》<sup>[2]</sup>。卷三和卷四《算书》的内容有重复之处,也有很多不同。由于卷三竹简腐蚀比较严重,文字剥落漫漶较多,其内容尚待进一步整理,这里重点介绍一下内容比较清楚的卷四。

卷四是多种古书的杂抄,其中的《算书》分为甲、乙两篇,书体和内容都不相同。甲篇抄于简册正面前段,共210多枚简,约占正面三分之二的篇幅,下接《日廷》。乙篇有近40枚简,开头几枚简抄于简册正面卷尾(可能有残失),上接《制衣》;然后接抄于背面卷首,下接《医方》。

《算书》甲篇可分为四个部分。

第一部分有32枚简,800余字,以鲁久次和陈起二人问对的形式,通过陈起的回答,详尽论述了古代数学的起源、作用和意义。原无篇题,故拈篇首语暂名为《鲁久次问数于陈起》<sup>[3]</sup>。

鲁久次问数于陈起曰:“久次读语、计数弗能竝(微),欲(微)一物,可(何)物为急?”陈【4-142】起对之曰:“子为弗能并(微),舍语而(微)数=,(数)可语(也),语不可数(也)。”……【4-144】(《概述》图二:右3、4)

“鲁久次”、“陈起”皆为人名,史籍未载。从二人的问答看来,陈起应是当时的一位“数学家”,鲁久次从其问学。《周髀算经》载有“荣方”与“陈子”的问对,“陈子”是否就是陈起,不得而知。“(微)”即通晓,西汉中期以后多避汉武帝讳改为“通”。鲁久次问陈起:在读语和计数不能兼通的情况下,想要先通晓一种,哪一种更急迫?陈起回答:如果不能兼通,应该舍弃“语”而先通“数”,因为“数”可以兼盖“语”的功能,“语”却没有“数”的作用。此处将“语”、“数”并举,颇能反映当时人的知识结构。战国时期举凡诸子百家、历史掌故皆称“语”<sup>[4]</sup>,用个不太恰当的比喻,“语”和“数”大致相当于今天的“文科”和“理科”。陈起贬低“语”而抬高“数”,显然是站在“数学家”的立场,这种“重理轻文”的倾向在战国诸子中极为罕见,让我们看到上古思想史鲜为人知的一面。

随后鲁久次又问:“天下之物,孰不用数?”

陈起答曰:“天下之物,无不用数者。”然后列举“天所盖之大”、“地所生之众”、“岁四时之至”、“日月相代”、“星辰之生(往)与来”、“五音六律生”、“毕用数”。乃至人身“百体(體)”之病痛,“其瘳(瘳)与死毕有数”。久次又问:“临官、立(蒞)政、立(度)度、兴事,可(何)数为急?”陈起答曰“数无不急者”,以下详举当时社会管理和生产中的种种实际事务,诸如“米粟(鬻)漆(漆)”、“甲兵(革)”、“段(鍛)鐵鑄金”、“錦繡文章”、“斬離(籬)鑿(壕)”、“和攻(功)度事”等,都离不开“数”。故“民若不知度数,無以智(知)百事經紀”。这段文字从原理和功能两方面,论述了“数”对于宇宙万物和人类社会的作用和意义,其详尽透彻在传世文献中罕有其匹<sup>[5]</sup>。不过其宗旨仍然重在强调数学的实用价值,并没有多少抽象理论的探讨,这与中国古代数学重实用、轻理论的传统是一致的。

在本篇的结尾,陈起有一段非常重要的话:

……故夫古聖賢書竹白(帛)以教後世子孫,學者必慎毋忘數。凡數之保(寶)莫急(及)【4-126】(隸)=首=,(隸首)者算之始也,少廣者算之市也,所求者毋不有也。【4-162】(《概述》图二:右5、6)

“(隸)首”即传说中的黄帝之臣“隶首”,《史记·历书》司马贞《索隐》引《系本》(即《世本》)及《律历志》曰:“黄帝使……隶首作算数”,后世文献关于“隶首作数”的记载盖皆本之《世本》。这一古史传说现在得到了出土资料的印证,“(隸)首者算之始”就是说隶首是算术的始祖。“少广”是一种古算术,《九章算术》第四章即“少广”,张家山汉简《算数书》、岳麓秦简《数》以及北大秦简的《算书》也都有“少广”术。“少广者算之市也”<sup>[6]</sup>,是说“少广”术就像一个市场,学习算术者所需要的东西都可以在其中找到,即“所求者毋不有也”。“少广”术虽然形式上是土地长度的计算,实际上却重在训练分数的加减乘除及通分、约分等,运算由浅入深,使学习者得到全面训练,将其比之为“算之市”可谓恰如其分。值得注意的是,《算书》甲篇的第三部分“算题汇编”,其第一题即为“少广”。《鲁久次问



图一 篇题“田书”  
(8-00)



图二 标题“田”  
(4-111)



图三 标题“租禾”  
(4-091)



图四 标题“租粟”  
(4-220)

数于陈起》篇末特别提到“少广”，似乎暗示两者之间存在某种联系。但是我们还不能由此断定陈起就是《算书》甲篇的作者，因为古书流传情况非常复杂，卷四本身就是多种古书的杂抄，《算书》甲篇也可能是由多种文本摘抄、改编而成，《鲁久次问数于陈起》与《算题汇编》未必来源于同一文本。另外古书多不题撰人，尤其是《算书》这类实用工具性很强的书籍，其“作者”往往是隐形的；即使出现有名有姓的人物，也大多出于伪托或杜撰，很难落实为“作者”。

《算书》甲篇的第二部分是“九九术”，共 8 枚简，分上下五栏抄写，始于“九九八十一”，终于“一一而二”，形式与今天的“九九乘法表”相差不大。西北敦煌、居延等地也出土过不少类似的汉代“九九术”木简，不过皆为残篇。北大秦简中的“九九术”木牍 M-025，行款、内容与竹简“九九术”表格略有不同，篇末多出“二半而一”，故其乘积总计为“凡千一百一十三字”<sup>[7]</sup>，较竹简的乘积总和多“一”。湖南里耶古城 J1 出土的一方秦“九九术”木牍，与北大的这方木牍内容完全相同，仅行款略有差异<sup>[8]</sup>。可见“九九术”所采用的表格形式至迟在战国晚期已经定型，此后流传过程中很少发生变化。将“九九术”表格抄录于“算题汇编”之前，说明它是当时学习算术者必备的基础知识，可能也

有方便随时查阅的用意。

第三部分“算题汇编”是《算书》甲篇的主体。其基本单位(学者多称为“算题”)一般由一种计算方法(“术”)和一至数道例题组成，前有大圆点“●”作为标志，文中还使用小圆点“·”作为分段符号，另有钩识(句读)符号。算题的结构主要分为以下三类：

一、先以“某某述(术)曰”或“曰某某述(术)”开头叙述计算方法，如果有多种算法，则用“·其一述(术)曰”的形式补充在后。然后列举例题，例题往往有多道，每道题只有具体数据的差别。这种类型为数最多。例如：

●曰啟廣述(術)：先直(置)其從(縱)數以為法，欲求一畝，即直(置)二百卅步以為實，【4-177】除實如法得一[步]，不盈步者以法命分。【4-178】

有田從(縱)廿五步，欲求一畝廣幾可(何)？曰：九步有(又)五分步三。【4-179】(《概述》图二：右 7~9)

(其下还有四道例题，彼此仅数字有别，此处从略)

“启广”即已知矩形土地面积及其长边之长(纵)，求其短边之长(广)。与张家山汉简《算数书》中的“启广”对比，可以看出二者算法无别而叙述方式有异：

啟廣 田從(縱)卅步，為啟廣幾何

而為田一亩?曰:啟八步。术(術)曰:以卅步為法,以二百卅步為實。啟從(縱)亦如此。【159】<sup>[9]</sup>

二、先举例题,然后用“其述(术)曰”的形式概括计算方法,张家山汉简《算数书》和《九章算术》中的算题大多属于这种结构。例如:

●田廣八分步三,從(縱)十二分步七,問田幾可(何)?·曰:九十六分步之廿一。·其述(術)曰:母相乘為法,【4-212】子相乘為實=,(實)如法而一。【4-213】

本题是矩形土地的面积计算,但涉及分数相乘,其“术”与“乘分”无别。

三、仅叙述计算方法而无例题,为数不多,主要见于抽象运算,如“乘分”、“合分”、“约分”等。岳麓秦简《数》中的“乘分”算题还附带抄录了乘法口诀<sup>[10]</sup>,北大秦简的“乘分”则无乘法口诀,这一点与张家山汉简《算数书》相同。

若干内容相近的算题编为一组,有1枚单独的“标题简”置于本组之前。“标题”书于该简正面上端,其上将竹简头端涂成黑方块,作为提示符号。可确定的这类“标题”有“田”、“租禾”、“租泉”(图二~四)、“自為實”等,概括了本组算题的内容。从算题的分组和“标题”的设置看来,主要是针对日常生产生活中遇到的各种实际问题来分类(比如租税计算除“租禾”外还有“租泉”),而不是以同类数学方法的总结和归纳为原则,体现了中国早期数学文献源自实用、又为实用服务的特点。这种同类算题的分组与《九章算术》的“章”有相似之处,据介绍岳麓秦简《数》也有类似的“组群”性特点<sup>[11]</sup>,但未发现北大秦简这样的“标题简”。而张家山汉简《算数书》则看不出这种“以类相从”的结构。

内容方面,有关田亩和租税的计算占《算书》甲篇的一半左右,仅田亩计算就有“里田”、“径田”、“方田”、“箕田”、“员(圆)田”、“启广”、“启从(纵)”等术。其中对特殊形状土地面积的计算不见于张家山汉简《算数书》,但见于岳麓秦简《数》和《九章算术》。另外,岳麓秦简中不见于张家山汉简和《九章算术》的一些内容,如“营军之术”,也见于《算书》甲篇。总体看来,

《算书》甲篇的算题类型、形式和篇章结构,与岳麓秦简《数》更为接近,而与张家山汉简《算数书》差别较大。郭书春先生曾指出,《九章算术》可分为术文统率例题与应用问题集两种体例<sup>[12]</sup>。目前看来,岳麓秦简《数》和北大秦简《算书》甲篇都是以术文统率例题为主,而张家山汉简《算数书》似乎更偏重于应用问题集。这说明,《九章算术》的两种体例可能有不同的文本来源,而这种不同数学文本之间的差异在秦汉之际甚至更早就已经出现了。

《算书》甲篇的第四部分是衡制换算,包括石、钧、斤、两、铢、朱(铢)等单位的相互换算,如“一石而四钧”、“一钧而卅斤”等,其中一部分抄写于《日廷》下部的空白处。岳麓秦简《数》也有类似的内容。

以上所介绍的《算书》甲篇的四个组成部分都是同一书手所抄,抄写时间可能相距不远。如前所论,《算书》甲篇的内容可能是摘抄自不同文本,并经抄写者改编,但是四个组成部分之间却存在有机的联系。以第三部分“算题汇编”为中心,第一部分《鲁久次问数于陈起》相当于一篇“导言”,第二部分“九九术”表格和第四部分“衡制换算”则是研习算题时必不可少的参考。经过抄写者的选择和编辑,这些内容客观上已构成一个新的文本。因此我们没有将《算书》甲篇分为四篇独立的文献,而是将其看作一个整体。

《算书》乙篇由多道呈并列关系的算题组成,每道算题内部也分为算法和例题,但算题之间看不出甲篇那种“以类相从”的分组。算题内容包括金、布、锡、钱的交易比率,土方及粮食体积计算,距离计算等。每道算题都有自己的题名,如“率”、“禾粟積”、“望遠”等,这一点与张家山汉简《算数书》相似。但题名的书写形式与《算数书》不同,是自右向左横书于本算题开头几枚简的头端(第一道编绳之上)。这种标题形式也见于卷四中的《制衣》、《穿门》等篇,以及睡虎地秦简《日书》、北大汉简《苍颉篇》等,应该是秦代比较流行的一种书写习惯。

北大秦简中的数学类简牍,其抄写年代与

岳麓秦简《数》接近,二者同为目前所见我国年代最早的数学书籍<sup>[13]</sup>。它不仅是出土秦汉数学简牍中数量最大的一批,更有不少内容为前所未见,为中国早期数学史的研究增添了一批宝贵的资料。其中的《鲁久次问数于陈起》篇,是罕见的涉及数学起源和作用的长篇议论性文字,在中国古代数学思想史上具有填补空白的意义。这批简牍完好的保存状态,使我们有可能复原其完整的篇章结构,对于同类简册(如编联次序已被打乱的岳麓秦简《数》)的整理复原也有参考价值。

目前已发现的四批秦汉数学简牍,其内容都是以日常生活所需的各种实用数学知识为主,与传世《九章算术》有明显的渊源关系。岳麓秦简和北大秦简中数学书籍的发现,证明至少在战国晚期至秦代,这些实用数学知识已在社会上广泛传播,在社会管理和生产生活中发挥着重要作用,并且已处于不断的搜集、整理和编订的过程中。而且至迟在秦汉之际,已出现不同文本在体例、结构等方面的差异。这对于探索《九章算术》这一中国最早的实用数学经典的形成过程,是非常重要的线索和启示。

- [1] 慧琳《一切经音义》卷七七引《风俗通》曰:“秦孝公以二百四十步为亩。”四川青川郝家坪秦墓出土木牍所载秦武王二年颁布的《为田律》,即以二百四十步为一亩,参看胡平生《青川秦墓木牍(为田律)所见田亩制度》,《文史》第十九辑,中华书局,1983年。
- [2] 目前发现同类竹书已有四批,另外三批皆有自题书名:张家山247号西汉墓竹书篇题为《算数书》,岳麓秦简篇题为《数》,睡虎地77号西汉墓竹书篇题为《算术》(后者见湖北省文物考古研究所、云梦县博物馆《湖北云梦睡虎地M77发掘简报》,《江汉考古》2008年第4期)。可见这类书籍在当时并无固定书名,但一般都用“数”或“算”来概括其内容。为避免与以前发现的同类竹书相重复,

我们暂拟了《算书》这个书名。

- [3] 最初介绍这篇文献时曾定名为《数论》,其后中国科学院自然科学史研究所郭书春来信指出《数论》之名不妥,因其容易与现代数学中的“数论”产生混淆,我们吸取郭先生的意见改易今名。
- [4] 《史记·秦始皇本纪》李斯所谓“诗书百家语”,“百家语”即战国诸子百家之言论著作;《国语·楚语下》记申叔时论太子教育,所教授的九类古书中有一类就是“语”,是一种记言为主兼以记事的史书,也称“事语”(刘向《战国策书录》),《国语》就是这类“语”的结集,参见李零《简帛古书与学术源流》,第273页,三联书店,2004年。
- [5] 《汉书·律历志》:“数者,一、十、百、千、万也,所以算数事物,顺性命之理也。……夫推历生律制器,规圆矩方,权衡衡平,准绳嘉量,探赜索隐,钩深致远,莫不用焉。”其立意与本篇相近,但详尽仍有不及。
- [6] 此处“市”字与以往所见秦隶“市”字略有不同,但与北大秦简中其他“市”字对比,可确认为“市”字无疑。且本句“始”、“市”、“有”三字古音同属之部,形成韵文。
- [7] 此处的“凡xx字”不是指全篇字数,而是指各项乘积的总和,或谓“字”为衍文,但秦汉“九九术”简牍大多如此,应是当时的一种习惯。
- [8] 湖南省文物考古研究所《里耶发掘报告》,彩版十八,岳麓书社,2007年。
- [9] 《张家山汉墓竹简(二四七号墓)》,文物出版社,2001年;彭浩《张家山汉简〈算数书〉注释》,第113页,科学出版社,2001年。
- [10] 参看陈松长《岳麓书院藏秦简综述》,《文物》2009年第3期;朱汉民、陈松长主编《岳麓书院藏秦简(贰)》,上海辞书出版社,2011年。
- [11] 参看肖灿、朱汉民《岳麓书院藏秦简〈数〉的主要内容及历史价值》,《中国史研究》2009年第3期。
- [12] 郭书春《关于中国传统数学的“术”》,载李文林等主编《数学与数学机械化》,山东教育出版社,2001年。
- [13] 清华大学藏战国竹简中有21枚简组成的“数表”,但据介绍应该是一种表格式的计算工具。

(责任编辑:李缙云)